A - 3

Integral pada L^∞ yang Dibangun oleh Ukuran Bernilai Proyeksi

Arta Ekayanti dan Ch. Rini Indrati.

FMIPA Universitas Gadjah Mada
arta_ekayanti@ymail.com

Abstrak—Pada pembahasan ukuran bernilai proyeksi, banyak tulisan yang memberikan paparan mengenai integral fungsi sederhana, lain halnya untuk integral fungsi terbatas esensial $\boldsymbol{L}^\infty$. Pada tulisan ini, akan dibahas integral pada $\boldsymbol{L}^\infty$ yang dibangun oleh ukuran bernilai proyeksi. Konstruksinya berdasarkan pada sifat densitas koleksi fungsi sederhana di dalam $\boldsymbol{L}^\infty$. Lebih lanjut, dengan memanfaatkan konstruksi yang didapat, diselidiki sifat-sifat integral tersebut.

Kata kunci: Fungsi Sederhana, Integral, Ukuran Bernilai Proyeksi.

I. PENDAHULUAN

Di dalam matematika khususnya matematika analisis, dikenalkan konsep ukuran. Salah satu ukuran yang telah banyak dikenal adalah ukuran Lebesgue. Diperhatikan bahwa ukuran Lebesgue merupakan ukuran yang bernilai real. Perlu diketahui bahwa ukuran tidak hanya bernillai real. Pada tahun 1991, Bagget [1] memberikan paparan mengenai ukuran bernilai proyeksi. Hal serupa juga dilakukan oleh Bell [2] dan Stromberg [4]. Bagget [1] menyebutkan bahwa ukuran bernilai proyeksi digunakan untuk membangun integral, dimulai dari integral fungsi sederhana hingga diperluas sampai pada integral fungsi terbatas esensial $f \in L^\infty$. Untuk integral fungsi sederhana, definisinya sudah diberikan. Lain halnya dengan integral fungsi $f \in L^\infty$ yang belum ada definisi eksplisitnya. Sementara pada referensi lain, langsung mengaitkan ukuran bernilai proyeksi dengan teori spektral tanpa membahas integralnya secara mendalam.

Diketahui X himpunan tak kosong dan $\mathcal{B}(X)$ aljabar-σ himpunan pada X. Fungsi $E: \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}^*$disebut ukuran jika $E(\emptyset) = 0$, untuk setiap $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ berlaku $E(A) \geq 0$ dan untuk setiap $\{A_n\} \subseteq \mathcal{B}(X)$ dengan $A_n \cap A_m = \emptyset$ untuk $n \neq m$, maka berlaku

$$E(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n). \tag{1}$$

Selanjutnya, mengacu pada [3], suatu fungsi $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dikatakan terukur, jika $f^{-1}(U)$ terukur, dengan $U \subseteq \mathbb{C}$ himpunan terbuka.

Diketahui H ruang Hilbert separabel. Didefinisikan $\mathcal{P}(H) = \{P | P: H \to H \ proyeksi\}$. Pada tulisan ini, digunakan ruang Hilbert atas lapangan $\mathbb{C}$. Pada pembahasan selanjutnya, $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ menyatakan aljabar-σ Borel pada $\mathbb{C}$. Berikut ini diberikan definisi ukuran bernilai proyeksi [2].

Definisi 1.1. *Pemetaan $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ disebut ukuran bernilai proyeksi pada $\mathbb{C}$ jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:*

1. $E(\emptyset) = 0$.
2. $E(\mathbb{C}) = id_H$, *dengan id_H operator identitas pada H.*
3. *Jika $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dengan $B_n \cap B_m = \emptyset$ untuk $m \neq n$ maka berlaku*

$$E(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(B_n). \tag{2}$$

Selanjutnya, jika E ukuran bernilai proyeksi, maka untuk setiap $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ berlaku

1. Jika $B_1 \subseteq B_2$ maka $E(B_1) \leq E(B_2)$.
2. $E(B_1 \cap B_2) + E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$.
3. $E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2)$.

Diberikan $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ ukuran bernilai proyeksi. Untuk setiap $x, y \in H$ dibentuk pemetaan $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, dengan definisi

$$E_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y\rangle, \tag{3}$$

untuk setiap $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Untuk E ukuran bernilai proyeksi, diperoleh $E_{x,y}$ ukuran kompleks, begitu juga sebaliknya.

Diperhatikan bahwa, untuk sebarang $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, fungsi $\phi: A \to \mathbb{C}$ disebut fungsi sederhana (*simple function*), jika ada $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ sehingga $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $i = 1,2,\dots,n$, dan $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan ada skalar $\alpha_i \in \mathbb{C}$ dengan $i = 1,2,\dots,n$, sehingga

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}. \tag{4}$$

Teorema 1.2. *Diketahui $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ ukuran bernilai proyeksi. Jika ϕ fungsi sederhana dengan representasi*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j\, \chi_{B_j} \tag{5}$$

dengan $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ dan $A_i, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ denga $n \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset, B_i \cap B_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, E(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j\, E(B_j). \tag{6}$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 1.2 dapat diberikan definisi sebagai berikut:

Definisi 1.3. *Diketahui $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ ukuran bernilai proyeksi dan ϕ fungsi sederhana dengan $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \chi_{A_i}$. Didefinisikan $\int \phi dE: H \to H$, dengan*

$$\int \phi dE = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E(A_i). \tag{7}$$

Diperhatikan bahwa, $\int \phi dE$ menunjukkan bahwa fungsi ϕ diintegralkan pada domain yang dibicarakan, sedangkan $\int_A \phi dE$ menunjukkan bahwa ϕ diintegralkan pada A himpunan bagian dari domain yang dibicarakan.

Selanjutnya, didefinisikan $\mathcal{F} = \{f | f: X \to \mathbb{C}\, fungsi\ sederhana\}$ dan diberikan himpunan $B(H) = \{T | T: H \to H\ linear\ terbatas\}$. Diperhatikan bahwa operator $\int \phi dE$ merupakan operator linear terbatas, dengan sifat-sifatnya dapat dilihat pada teorema berikut:

Teorema 1.4. *Diketahui $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ ukuran bernilai proyeksi. Pemetaan $L: \mathcal{F} \to B(H)$ dengan $L(\phi) = \int \phi dE$ memenuhi sifat-sifat berikut:*

1. *L multiplikatif, yaitu $L(\phi\psi) = L(\phi)L(\psi)$.*
2. *Untuk sebarang $\phi \in \mathcal{F}$ berlaku $\left(\int \phi dE\right)^* = \int \bar{\phi} dE$, dengan $\bar{\phi}$ konjugat dari ϕ.*

Di dalam penelitian ini akan dibahas mengenai konstruksi dari definisi integral fungsi $f \in L^\infty$ yang dibangun oleh ukuran bernilai proyeksi. Lebih lanjut, akan ditunjukkan sifat-sifatnya.

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap perkembangan ilmu pengetahuan khususnya mengenai ukuran bernilai proyeksi dan integral pada L^∞, serta memberikan motivasi untuk melakukan penelitian mengenai penerapan integral pada L^∞, misalnya pada bahasan teori spektral.

II. INTEGRAL PADA L^∞ YANG DIBANGUN OLEH UKURAN BERNILAI PROYEKSI

Berikut ini diberikan teorema yang menunjukkan karakteristik barisan fungsi sederhana $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$.

Teorema 3.1. *Jika $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ terbatas dan terukur,maka terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ sehingga*

$$lim_{n\to\infty} f_n = f. \tag{8}$$

Bukti: Diperhatikan bahwa f terbatas maka terdapat $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in \mathbb{C}$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan $y_j = y_0 + \frac{2jM}{n}$, dengan $j = 1,2,\dots,n$ dan $y_0 = -M$. Lebih lanjut, didefinisikan himpunan

$$X_j = \{x \in \mathbb{C} | y_{j-1} \leq f(x) < y_j\} \tag{9}$$

untuk $j = 1,2,\dots,n-1$ dan

$$X_n = \{x \in \mathbb{C} | y_{n-1} \leq f(x) \leq y_n\}. \tag{10}$$

Dibentuk $f_n(x) = y_{j-1}$ untuk setiap $x \in X_j$ untuk suatu $j \in \{1,2, \dots, n\}$. Dengan demikian, diperoleh $f_n = \sum_{j=1}^{n} y_{j-1}\chi_{X_j}$ fungsi sederhana. Diperhatikan bahwa

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2M}{n}, \tag{11}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{C}$. Dengan demikian $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. ■

Pada tulisan ini, diberikan $L^\infty(E)$ untuk menyatakan koleksi fungsi kompleks yang terbatas esensial-E.

Teorema 3.2. *Diketahui $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ ukuran bernilai proyeksi. Jika $f \in L^\infty(E)$, maka terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ sehingga*

$$lim_{n\to\infty} f_n = f. \tag{12}$$

Bukti: Diperhatikan bahwa $f \in L^\infty(E)$, maka terdapat bilangan asli N dan $A \subseteq \mathbb{C}$ dengan $E(A) = 0$ dan $|f(x)| \leq N$ untuk setiap $x \in \mathbb{C} - A$. Diambil sebarang $x \in \mathbb{C}$. Untuk N tersebut, didefinisikan

$$f_N(x) \coloneqq \begin{cases} -N & jika\ f(x) < -N \\ f(x) & jika\ |f(x)| < N \\ N & jika\ f(x) > N \end{cases} \tag{13}$$

Diperhatikan bahwa f_N merupakan fungsi terbatas, maka berdasarkan Teorema 3.1 terdapat barisan fungsi sederhana (f_N^n),sehingga $\|f_N^n - f_N\|_\infty \to 0$ untuk $n \to \infty$. Dengan demikian diperoleh

$$\|f_N^n - f\|_\infty \to 0, \tag{14}$$

untuk $n \to \infty$. Artinya $f_n = f_N^n$ konvergen ke f di $L^\infty(E)$. ■

Berdasarkan Teorema 3.1 dan Teorema 3.2, diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.3. *Koleksi fungsi sederhana $\mathcal{F}$ dense di $L^\infty(E)$.*

Bukti: Diambil sebarang $f \in L^\infty(E)$. Diambil sebarang fungsi kompleks $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, maka f dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f = g + ih, \tag{15}$$

dengan $, h: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Diasumsikan bahwa f terbatas, maka g dan h terbatas. Karena f terukur maka g dan h terukur. Berdasarkan Teorema 3.1, terdapat barisan fungsi sederhana $(g_n), (h_n) \subseteq \mathcal{F}$ dengan $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ dan $\|h_n - h\|_\infty \to 0$ untuk $n \to \infty$. Dengan demikian, diperoleh barisan fungsi sederhana $f_n = g_n + ih_n$ sehingga $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ untuk $n \to \infty$, dengan $f = g + ih$ di $L^\infty(E)$. Selanjutnya, untuk $f \in L^\infty(E)$ tak terbatas pembuktiannya sejalan dengan kasus f terbatas. Dengan memanfaatkan Teorema 3.2 maka teorema terbukti. ■

Berdasarkan Teorema 3.3, $\mathcal{F}$ dense di $L^\infty(E)$. Dengan demikian pemetaan $L: \mathcal{F} \to B(H)$ pada Teorema 1.4 dapat diperluas menjadi $L': L^\infty(E) \to B(H)$. Selanjutnya, akan diselidiki definisi dari pemetaan L' tersebut.

Diperhatikan bahwa, berdasarkan Teorema 3.3 berlaku $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ untuk $n \to \infty$. Dengan demikian, $f_n \to f$ seragam pada $\mathbb{C}$.

Selanjutnya, berikut ini diberikan Teorema Kekonvergenan Seragam.

Teorema 3.4. *Diketahui $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ ukuran bernilai proyeksi dan (f_n) barisan fungsi terukur dan terbatas. Jika f_n konvergen seragam pada $\mathbb{C}$, maka*

$$lim_{n\to\infty} \int_A f_n dE = \int_A f dE. \tag{16}$$

Bukti: Diperhatikan bahwa, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, f_n terbatas dan terukur dan $f_n \to f$ seragam pada $\mathbb{C}$, maka f terbatas dan terukur. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ sebarang dan $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$dengan $E(A) = 0$. Karena $f_n \to f$ seragam pada $\mathbb{C}$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N$ berlaku

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\|E(A)\|_\infty}. \tag{17}$$

Dengan demikian, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N$ berlaku $\left|\int_A f_n dE - \int_A f d\right| < \varepsilon$. ■

Diperhatikan bahwa, untuk setiap $f \in L^{\infty}(E)$, terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ dan $f_n \to f$ seragam pada $\mathbb{C}$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.4, untuk setiap $f \in L^{\infty}(E)$ berlaku

$$\int f dE = \lim_{n\to\infty} \int f_n dE, \tag{18}$$

dengan $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ dan $f_n \to f$ seragam pada $\mathbb{C}$. Dengan demikian, diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.5. *Jika* $E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ *ukuran bernilai proyeksi, maka dapat didefinisikan pemetaan* $T: L^{\infty}(E) \to B(H)$ *dengan*

$$T(f) = \int f dE, \tag{19}$$

untuk setiap $f \in L^{\infty}(E)$.

Bukti: Dalam hal terdapat barisan $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{F}$ dengan $f_n \to f$ dan $g_n \to g$ seragam pada $\mathbb{C}$, maka berdasarkan Teorema 3.4, diperoleh $\lim_{n\to\infty} \int f_n dE = \int f dE$ yaitu, $\left|\int f_n dE - \int f dE\right| \to 0$ untuk $n \to \infty$ dan $\lim_{n\to\infty} \int g_n dE = \int g dE$ yaitu, $\left|\int g_n dE - \int g dE\right| \to 0$ untuk $n \to \infty$. Oleh karena itu, berlaku

$$\left|\int f_n dE - \int g_n dE\right| \to 0, \tag{20}$$

untuk $n \to \infty$. Dengan demikian, $\lim_{n\to\infty} \int f_n dE = \lim_{n\to\infty} \int g_n dE$. Hal ini menunjukkan bahwa $\int f dE$ tunggal. Selanjutnya,akan dibuktikan bahwa $T \in B(H)$. Diambil sebarang fungsi $f, g \in L^{\infty}(E)$, maka terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{F}$ dengan $f_n \to f$ dan $g_n \to g$ seragam pada $\mathbb{C}$. Dengan demikian, terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n + g_n) \subseteq \mathcal{F}$ sehingga $f_n + g_n \to f + g$ seragam pada $\mathbb{C}$. Diperhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} T(f) + T(g) &= \int f dE + \int g dE \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n dE + \lim_{n\to\infty} \int g_n dE \\ &= \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n)\, dE. \end{aligned} \tag{21}$$

Karena $f_n + g_n \to f + g$ seragam pada $\mathbb{C}$, maka berdasarkan Teorema 3.4, $\int (f_n + g_n) dE \to f + g$ untuk $n \to \infty$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} T(f) + T(g) &= \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n)\, dE \\ &= \int (f + g) dE \\ &= T(f + g). \end{aligned} \tag{22}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $T(\alpha f) = \alpha T(f)$. Diambil sebarang fungsi $f \in L^{\infty}(E)$, maka terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ dengan $f_n \to f$ seragam pada $\mathbb{C}$. Dengan demikian, terdapat barisan fungsi sederhana $(\alpha f_n) \subseteq \mathcal{F}$ sehingga $\alpha f_n \to \alpha f$ seragam pada $\mathbb{C}$.

$$\alpha T(f) = \alpha \int f dE = \alpha \lim_{n\to\infty} \int f_n dE = \lim_{n\to\infty} \int \alpha f_n\, dE. \tag{23}$$

Karena $\alpha f_n \to \alpha f$ seragam pada $\mathbb{C}$, maka berdasarkan Teorema 3.4, $\int \alpha f_n dE \to \alpha f$ untuk $n \to \infty$. Dengan demikian, diperoleh

$$\alpha T(f) = \lim_{n\to\infty} \int \alpha f_n\, dE = \int \alpha f dE = \alpha T(f). \tag{24}$$

Jadi, terbukti bahwa T operator linear. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa T operator terbatas, yaitu dengan menunjukkan bahwa $\int f dE$ terbatas. Diambil sebarang $f \in L^{\infty}(E)$, maka terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ dengan $f_n \to f$ seragam pada $\mathbb{C}$. Dengan demikian, untuk sebarang $x, y \in H$ berlaku

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\int f dE\right)x, y \right\rangle &= \left\langle \left(\lim_{n\to\infty} \int f_n dE\right)x, y \right\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \left(\int f_n dE\right)x, y \right\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n dE_{x,y} \\ &= \int f dE_{x,y}. \end{aligned} \tag{25}$$

Diperhatikan bahwa,

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{C}\}. \tag{26}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} \left|\left\langle\left(\int f dE\right)x,y\right\rangle\right| &= \left|\int f dE_{x,y}\right| \\ &\leq \left|\int \|f\|_\infty dE_{x,y}\right| \\ &= \left|\|f\|_\infty \int dE_{x,y}\right| \\ &= \|f\|_\infty \left|\int dE_{x,y}\right| \\ &= \|f\|_\infty |E_{x,y}| \\ &\leq \|f\|_\infty \|x\|\|y\|. \end{aligned} \tag{27}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\int f dE$ terbatas. Jadi,disimpulkan bahwa $T \in B(H)$. ■

Konstruksi yang diperoleh dari Teorema 3.5, yang diberikan dalam (1), memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

Teorema 3.6. *Jika diberikan ukuran bernilai proyeksi E, maka pemetaan $T: L^\infty(E) \to B(H)$ dengan definisi (1) memenuhi sifat-sifat sebagi berikut:*

1. *Multiplikatif, yaitu untuk setiap fungsi $f, g \in L^\infty(E)$ berlaku $T(fg) = T(f)T(g)$.*
2. *Untuk sebarang $f \in L^\infty(E)$ berlaku $\left(\int f dE\right)^* = \int \bar{f} dE$, dengan $\bar{f}$ konjugat dari f.*
3. *Untuk sebarang $f \in L^\infty(E)$ berlaku $\|T(f)\| = \|f\|_\infty$.*

Bukti:

1. Diambil sebarang fungsi $f, g \in L^\infty(E)$, maka terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{F}$ dengan $f_n \to f$ dan $g_n \to g$ seragam pada $\mathbb{C}$. Dengan demikian, terdapat barisan fungsi sederhana $(f_n g_n) \subseteq \mathcal{F}$ sehingga $f_n g_n \to fg$ seragam pada $\mathbb{C}$. Diperhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} T(f)T(g) &= \left(\int f dE\right)\left(\int g dE\right) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \int f_n dE\right)\left(\lim_{n\to\infty} \int g_n dE\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int f_n dE\right)\left(\int g_n dE\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int (f_n g_n)\, dE. \end{aligned} \tag{28}$$

   Karena $f_n g_n \to fg$ seragam pada $\mathbb{C}$, maka berdasarkan Teorema 2.8, $\int (f_n g_n) dE \to \int fg dE$ untuk $n \to \infty$. Dengan demikian, diperoleh $T(f)T(g) = \int fg dE = T(fg)$.

2. Diambil sebarang $x, y \in H$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \left\langle\left(\int f dE\right)^* x, y\right\rangle &= \left\langle x, \left(\int f dE\right)y\right\rangle \\ &= \left\langle x, \left(\lim_{n\to\infty} \int f_n dE\right)y\right\rangle \\ &= \left\langle\left(\lim_{n\to\infty} \int \bar{f}_n dE\right)x, y\right\rangle \\ &= \left\langle\left(\int \bar{f} dE\right)x, y\right\rangle \end{aligned} \tag{29}$$

3. Diambil sebarang $f \in L^\infty(E)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &= \left\|\lim_{n\to\infty} \int f_n dE\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\|\int f_n dE\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned} \tag{30}$$

■

III. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa ukuran bernilai proyeksi digunakan untuk membangun integral. Dimulai dari integral fungsi sederhana yang dibangun oleh ukuran bernilai proyeksi, yaitu

$$\int \phi dE = \sum_{i=1}^{n} a_i E(A_i), \tag{31}$$

untuk setiap fungsi sederhana $\phi \in \mathcal{F}$. Dengan berdasarkan fakta bahwa koleksi fungsi sederhana $\mathcal{F}$ dense di $L^\infty(E)$ (Teorema 3.3), maka diperoleh konstruksi integral fungsi $f \in L^\infty$ yang dibangun oleh ukuran bernilai proyeksi, yaitu

$$\int f dE = \lim_{n\to\infty} \int f_n dE, \tag{32}$$

dengan $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ dan $f_n \to \phi$ seragam pada $\mathbb{C}$.

Konstruksi yang diperoleh tersebut, memenuhi sifat-sifat diantaranya multiplikatif, yaitu $\int (fg) dE = \left(\int f dE\right)\left(\int g dE\right)$, $\left(\int f dE\right)^* = \int \bar{f} dE$, dengan $\bar{f}$ konjugat dari f dan $\left\|\int f dE\right\| = \|f\|_\infty$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bagget, L.W, "Functional Analysis," Marcell-Dekker, New York, 1991.

[2] Bell, J., " Projection-Valued Measure and Spectral Integrals," http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/pvm.pdf, diakses tanggal 8 November 2014.

[3] Royden, H.L dan P.M Fitzpatrick, "Real Analysis, Fourth Edition," China Machine Press, China, 2010.

[4] Stromberg, R.,Spectral Theory for Bounded Self-Adjont, "U.U.D.M Project Report 2006:5," Uppsala University, 2006.